

Hybridation de méthodes exactes et approchées pour la coloration de graphe pondéré

Encadrants : Cyril Grelier, Nicolas Jozefowicz

Structure : LORIA (Nancy)

Domaines : Optimisation Combinatoire, Recherche Opérationnelle, Apprentissage

Durée : 5-6 mois

Année : 2026

Niveau : Master 2 Informatique / Mathématiques Appliquées

Résumé : Ce stage porte sur le développement de méthodes hybrides (exactes et approchées) pour le problème de coloration de graphe pondéré (WVCP). L'objectif est d'abord de proposer des modèles exacts puis de les intégrer dans un cadre d'une Adaptive Large Neighborhood Search.

Présentation du problème

Coloration de graphe (GCP)

Le problème de coloration de graphe (*Graph Coloring Problem* - GCP ou *Vertex Coloring Problem* - VCP) consiste à attribuer une couleur à chaque sommet d'un graphe non orienté $G = (V, E)$, de manière à ce que deux sommets adjacents ne partagent pas la même couleur, tout en minimisant le nombre total de couleurs utilisées. Trouver le nombre chromatique $\chi(G)$, c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs nécessaires, est un problème NP-difficile, ce qui signifie qu'il n'existe pas d'algorithme connu permettant de le résoudre en temps polynomial.

La coloration de graphe trouve des applications dans de nombreux domaines pratiques, l'attribution de fréquences, l'allocation de registres ou encore les problèmes d'emplois du temps.

Coloration pondérée (WVCP)

La coloration pondérée (*Weighted Vertex Coloring Problem* - WVCP) est une variante de la coloration de graphe. Une instance du WVCP considère un graphe $G = (V, E, w)$, où w est une fonction associant à chaque sommet $v \in V$ un poids $w(v)$ strictement positif.

L'objectif du WVCP est de minimiser la somme des poids des sommets les plus lourds de chaque groupe de couleurs. Formellement, étant donné une partition $S = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ des sommets en k ensembles indépendants (groupes de couleurs), la fonction objectif est :

$$f(S) = \sum_{i=1}^k \max_{v \in V_i} w(v) \quad (1)$$

Le WVCP apparaît, entre autres, dans des problèmes de décomposition de matrice ou dans des problèmes d'ordonnancement par lot en parallèle FURINI et MALAGUTI, 2012; PRAIS et RIBEIRO, 2000.

Problématique

Le WVCP présente des difficultés pour les recherches locales à cause des nombreux plateaux dans l'espace de recherche. Ces plateaux sont dû au fait que seul le sommet le plus lourd d'une couleur influence le score, ce qui signifie que les autres sommets peuvent changer de couleur sans impact sur le score tant qu'ils ne deviennent pas le sommet le plus lourd de la nouvelle couleur.

Les méthodes exactes sont moins impactées par ce phénomène mais présentent des difficultés à trouver des solutions pour des grands graphes.

Objectifs du stage

Développement de modèles exacts

Plusieurs modèles exacts existent dans la littérature, RIBEIRO et al., 1989 et FURINI et MALAGUTI, 2012 ont utilisé des méthodes de génération de colonnes ou du *branch and price*. MALAGUTI et al., 2009 a proposé 3 modèles ILP avec différentes ruptures de symétries en deux phases : une alternance entre de la génération de colonnes et de l'optimisation de colonnes avec l'aide des modèles ILP. Plus récemment, CORNAZ et al., 2017 avec l'algorithme MWSS a proposé une reformulation du problème sous forme d'une recherche d'ensembles indépendants de poids maximum et le résout avec un solveur MIP (*Mixed-Integer Programming*) avec de bons résultats. Dans GOUDET et al., 2023, 3 modèles CP (*Constraint Programming*) sont proposés pour le WVCP avec un encodage primal, un dual avec une adaptation de CORNAZ et al., 2017 pour la CP et un 3ème avec une liaison entre les deux premiers.

Le premier objectif de ce stage sera de proposer de nouveaux modèles pour le WVCP adaptés aux caractéristiques des instances (graphes denses vs. peu denses) et de comparer l'efficacité des différentes approches sur des benchmarks standards.

Intégration dans une approche hybride

La deuxième étape consistera à intégrer ces modèles exacts dans un algorithme hybride combinant métaheuristiques et méthodes exactes. L'approche privilégiée sera le cadre d'une *Large Neighborhood Search* (LNS) PISINGER et ROPKE, 2018, un algorithme qui alterne :

- **Phases de destruction** : sélection de variables à "libérer" selon différentes stratégies, potentiellement guidées par apprentissage
- **Phases de reconstruction** : résolution du sous-problème résultant, soit par méthodes exactes (pour garantir l'optimalité locale), soit par algorithmes approchés (pour la rapidité)

Des variantes adaptatives (ALNS - *Adaptive Large Neighborhood Search*) HENDEL, 2022 pourront être explorées, où les stratégies de destruction/reconstruction sont sélectionnées dynamiquement en fonction de leur performance. Ainsi que l'intégration d'apprentissage pour assister dans le choix des sommets à détruire ou autres stratégies.

Expérimentations

Pour valider les approches développées, nous disposons d'un ensemble d'instances de benchmarks de l'état de l'art, de plusieurs méthodes issues de l'état de l'art (GOUDET et al., 2023; GRELIER et al., 2024), ainsi que d'un accès à Grid5000 pour les tests à grande échelle.

Pour le langage utilisé, la majorité des codes dont nous disposons sont codés en C++, il est envisageable de faire les prototypes en Python mais le passage vers du C++/Rust/Zig sera nécessaire pour des performances optimales.

Les résultats seront comparés aux meilleures méthodes connues de la littérature. Si les résultats sont concluants, une publication dans une conférence ou revue internationale sera envisagée.

Références

- CORNAZ, D., FURINI, F., & MALAGUTI, E. (2017). Solving vertex coloring problems as maximum weight stable set problems. *Discrete Applied Mathematics*, 217, 151-162.
- FURINI, F., & MALAGUTI, E. (2012). Exact weighted vertex coloring via branch-and-price. *Discrete Optimization*, 9(2), 130-136.
- GOUDET, O., GRELIER, C., & LESAIN, D. (2023). New Bounds and Constraint Programming Models for the Weighted Vertex Coloring Problem. *IJCAI*, 1927-1934.
- GRELIER, C., GOUDET, O., & HAO, J.-K. (2024). A memetic algorithm with adaptive operator selection for graph coloring. *European conference on evolutionary computation in combinatorial optimization (part of EvoStar)*, 65-80.
- HENDEL, G. (2022). Adaptive large neighborhood search for mixed integer programming. *Mathematical Programming Computation*, 14(2), 185-221.
- MALAGUTI, E., MONACI, M., & TOTH, P. (2009). Models and heuristic algorithms for a weighted vertex coloring problem. *Journal of Heuristics*, 15, 503-526.
- PISINGER, D., & ROPKE, S. (2018). Large neighborhood search. In *Handbook of metaheuristics* (p. 99-127). Springer.
- PRAIS, M., & RIBEIRO, C. C. (2000). Reactive GRASP : An application to a matrix decomposition problem in TDMA traffic assignment. *INFORMS Journal on Computing*, 12(3), 164-176.
- RIBEIRO, C. C., MINOUX, M., & PENNA, M. C. (1989). An optimal column-generation-with-ranking algorithm for very large scale set partitioning problems in traffic assignment. *European Journal of Operational Research*, 41(2), 232-239.