

Stage

Hybridation de méthodes exactes et approchées pour la coloration de graphe pondéré

Présenté par :

Habib Khteira

Encadré par :

Cyril Grelier

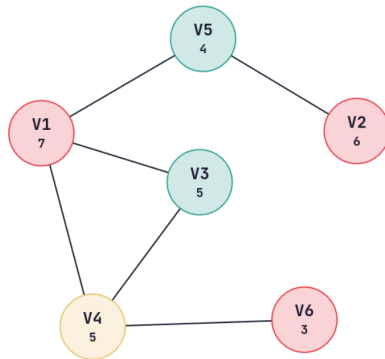
Ayse Akbalik

Nicolas Jozefowicz

Introduction

WVCP - Weighted Vertex Coloring Problem

- deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes
- le coût d'une couleur est le **poids maximal** de ses sommets
- l'objectif est de minimiser la somme des coûts des couleurs
- problème **NP-difficile**

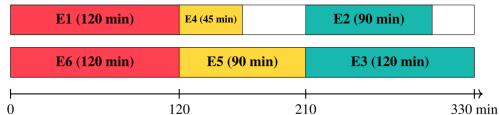
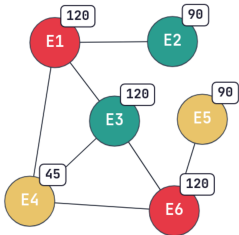
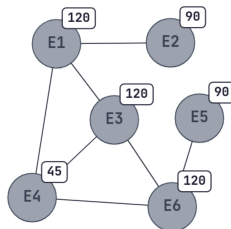


$$f(S) = \sum_{C \in S} \max_{v \in C} w(v)$$

$$f(S) = 7 + 5 + 5 = \boxed{17}$$

Cas d'application : planification d'examens

Examen	Durée	Participants
E1	120	P1, P2, P7
E2	90	P1, P3
E3	120	P2, P4, P8
E4	45	P4, P5, P7
E5	90	P6, P8
E6	120	P4, P6



État de l'art

Méthodes exactes

1989 Travaux anciens liés au WVCP : Ribeiro et al.

2009

3 modèles PLNE
M1 et **M2**
affectation
sommet-couleur
1 modèle
set covering

2012

Ensembles stables
couverture
d'ensembles
génération
de colonnes
Branch-and-Price

2017

Modèle Dual
reformulation
du WVCP
en *MWSS*
graphe
complémentaire
orienté

2023

3 modèles CP
Primal, Dual, Joint
bornes sur le score
et les couleurs
règles de réduction

Instances réduites

Récupérées sur le dépôt GitHub des auteurs.

Modèle Joint en PLNE

Relie les formulations M2 et Dual.

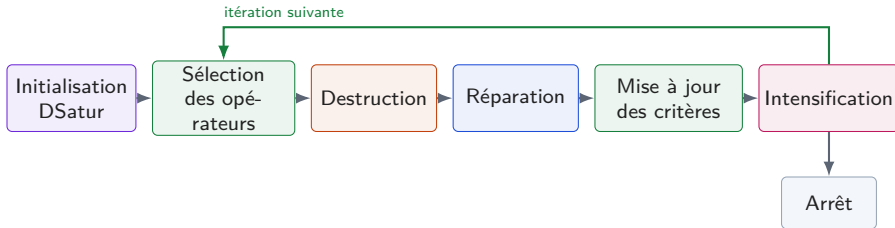
[Ribeiro et al., 1989, Malaguti et al., 2009, Furini and Malaguti, 2012, Cornaz et al., 2017, Goudet et al., 2023]

Méthodes approchées

Méthode	Référence(s)	Nature de l'approche
Welsh–Powell	[Welsh and Powell, 1967] [Grelier, 2023]	heuristique gloutonne statique
DSatur	[Brélaz, 1979] [Grelier, 2023]	heuristique gloutonne dynamique
RGRASP	[Prais and Ribeiro, 2000]	construction gloutonne multi-départ
AFISA	[Sun <i>et al.</i> , 2018]	recherche locale adaptative
RedLS	[Wang <i>et al.</i> , 2020]	recherche locale avec réduction des conflits
ILSTS	[Nogueira <i>et al.</i> , 2021]	recherche locale taboue itérée
DLMCOL	[Goudet <i>et al.</i> , 2022]	apprentissage profond
MCTS	[Grelier <i>et al.</i> , 2022]	recherche arborescente de Monte-Carlo
AHEAD	[Grelier <i>et al.</i> , 2024]	approche mémétique

ALNS proposée

ALNS : Adaptive Large Neighborhood Search



Du LNS à l'ALNS

- LNS : *Large Neighborhood Search*
- destruction et réparation d'une partie de la solution
- ALNS : choix adaptés aux performances observées

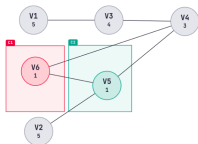
Contribution au WVCP

- **décoloration** adaptative de plusieurs sommets
- **réparation exacte** par **M2** ou **Dual**
- **intensification** courte par **RedLS**
- acceptation uniquement si la solution est valide et non dégradée

Trois destructions pour explorer des structures différentes

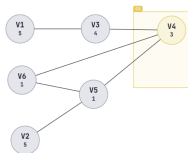
D_{heavy} : sommets lourds

- sommets parcourus par poids décroissant.

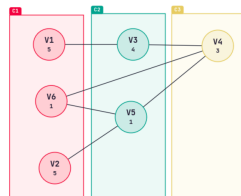


D_{color} : couleurs coûteuses

- couleurs triées selon $W(c) = \max_{v \in C_c} w_v$
- chaque couleur choisie est entièrement détruite.



Solution courante



Mémoire taboue : les éléments récents sont évités, puis la restriction est relâchée si nécessaire.

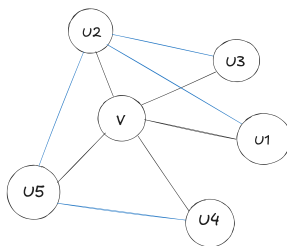
Trois destructions pour explorer des structures différentes

D_{dense} : zone dense

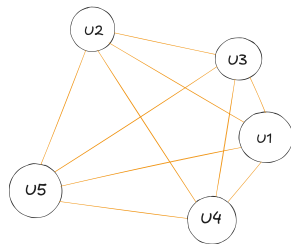
$$\text{dens}(v) = \begin{cases} \frac{2|E(N(v))|}{d(v)(d(v)-1)}, & d(v) \geq 2, \\ 0, & d(v) < 2, \end{cases}$$

$$\rho(v) = \text{dens}(v)(d(v) + 1)$$

- centres examinés par score ρ décroissant
- le centre puis ses voisins sont décolorés



$$E(N(v)) = 4$$

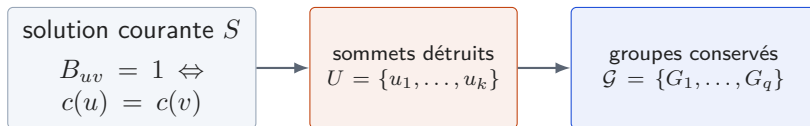


$$\frac{d(v) \cdot (d(v) - 1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\text{dens}(v) = 4 / 10.$$

Mémoire taboue : les éléments récents sont évités, puis la restriction est relâchée si nécessaire.

Données conservées pour la réparation



Matrice de similarité après destruction

$$B_{uv}^- = \begin{cases} B_{uv}, & u \notin U \text{ et } v \notin U, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque G_g conserve les sommets non détruits d'une même couleur.

Compatibilité groupe-sommet

$$W_g = \max_{v \in G_g} w_v$$

$$a_{ig} = 1 \iff \forall v \in G_g, \{u_i, v\} \notin E$$

$A = (a_{ig})$ alimente M2 et la construction des arcs de Dual.

Réparation par le modèle M2

Modèle original M2

$$w_1 \geq \dots \geq w_n$$

$$y_{ih} = 1 \iff i \in C_h, \quad h \leq i$$

$$\min \sum_{h=1}^n w_h y_{hh} \quad (\text{M2-1})$$

Une couleur est représentée par son sommet dominant.

$$\text{s.c.} \quad \sum_{h=1}^i y_{ih} = 1, \quad \forall i \in V, \quad (\text{M2-2})$$

$$y_{ih} + y_{jh} \leq y_{hh}, \quad \forall \{i,j\} \in E, \quad h \leq \min(i,j), \quad (\text{M2-3})$$

$$y_{ih} \leq y_{hh}, \quad \forall i \in V, \quad h < i, \quad (\text{M2-4})$$

$$y_{ih} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, \quad h \leq i. \quad (\text{M2-5})$$

[Malaguti et al., 2009]

Réparation par le modèle M2

Modèle original M2

$$w_1 \geq \dots \geq w_n$$

$$y_{ih} = 1 \iff i \in C_h, \quad h \leq i$$

$$\min \sum_{h=1}^n w_h y_{hh} \quad (\text{M2-1})$$

Une couleur est représentée par son sommet dominant.

$$\text{s.c.} \quad \sum_{h=1}^i y_{ih} = 1, \quad \forall i \in V, \quad (\text{M2-2})$$

$$y_{ih} + y_{jh} \leq y_{hh}, \quad \forall \{i,j\} \in E, \quad h \leq \min(i,j), \quad (\text{M2-3})$$

$$y_{ih} \leq y_{hh}, \quad \forall i \in V, \quad h < i, \quad (\text{M2-4})$$

$$y_{ih} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, \quad h \leq i. \quad (\text{M2-5})$$

[Malaguti et al., 2009]

Réparation R_{M2} adaptée à l'ALNS

Adaptation du modèle M2

$x_{ig} = 1$: u_i rejoint le groupe conservé G_g .

$y_{ih} = 1$: u_i rejoint la nouvelle couleur représentée par u_h .

Z_g : coût du groupe G_g après réparation.

$$\min \sum_{g=1}^q Z_g + \sum_{i=1}^k w_i y_{ii} \quad (R_{M2-1})$$

Contraintes du modèle adapté

$$\sum_{g=1}^q x_{ig} + \sum_{h=1}^i y_{ih} = 1, \quad i = 1, \dots, k \quad (R_{M2-2})$$

$$y_{ih} \leq y_{hh}, \quad 1 \leq h < i \leq k \quad (R_{M2-3})$$

$$x_{ig} \leq a_{ig}, \quad \forall i, g \quad (R_{M2-4})$$

$$Z_g \geq W_g, \quad \forall g \quad (R_{M2-5})$$

$$Z_g \geq w_i x_{ig}, \quad \forall i, g \quad (R_{M2-6})$$

$$x_{ig} + x_{jg} \leq 1, \quad \forall \{u_i, u_j\} \in E, \quad \forall g \quad (R_{M2-7})$$

$$y_{ih} + y_{jh} \leq y_{hh}, \quad \forall \{u_i, u_j\} \in E, \quad h \leq \min(i, j) \quad (R_{M2-8})$$

$$x_{ig}, y_{ih} \in \{0, 1\}, \quad Z_g \geq 0, \quad (R_{M2-9})$$

Réparation R_{M2} adaptée à l'ALNS

Adaptation du modèle M2

$x_{ig} = 1$: u_i rejoint le groupe conservé G_g .

$y_{ih} = 1$: u_i rejoint la nouvelle couleur représentée par u_h .

Z_g : coût du groupe G_g après réparation.

$$\min \sum_{g=1}^q Z_g + \sum_{i=1}^k w_i y_{ii} \quad (R_{M2-1})$$

Contraintes du modèle adapté

$$\sum_{g=1}^q x_{ig} + \sum_{h=1}^i y_{ih} = 1, \quad i = 1, \dots, k \quad (R_{M2-2})$$

$$y_{ih} \leq y_{hh}, \quad 1 \leq h < i \leq k \quad (R_{M2-3})$$

$$x_{ig} \leq a_{ig}, \quad \forall i, g \quad (R_{M2-4})$$

$$Z_g \geq W_g, \quad \forall g \quad (R_{M2-5})$$

$$Z_g \geq w_i x_{ig}, \quad \forall i, g \quad (R_{M2-6})$$

$$x_{ig} + x_{jg} \leq 1, \quad \forall \{u_i, u_j\} \in E, \quad \forall g \quad (R_{M2-7})$$

$$y_{ih} + y_{jh} \leq y_{hh}, \quad \forall \{u_i, u_j\} \in E, \quad h \leq \min(i, j) \quad (R_{M2-8})$$

$$x_{ig}, y_{ih} \in \{0, 1\}, \quad Z_g \geq 0, \quad (R_{M2-9})$$

Réparation par le modèle Dual

Modèle Dual

- chaque arête du complément est orientée du sommet lourd vers le sommet léger
- chaque arc reçoit le poids de sa cible.

Maximiser la somme des poids des arcs sélectionnés.

$$\max \sum_{e \in \vec{E}} \hat{w}_e x_e \quad (D1)$$

$$\text{s.c. } x_{vu} + x_{vw} \leq 1,$$

$$x_e + x_f \leq 1,$$

$$x_e + x_f \leq 1,$$

$$x_e \in \{0, 1\},$$

$$vu, vw \in \vec{E}, \quad (D2)$$

$$uw, wu \notin \vec{E} \quad (D3)$$

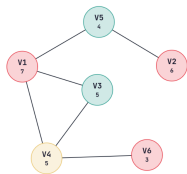
$$\forall v, e \in \delta^-(v), \quad (D4)$$

$$f \in \delta^+(v), \quad (D5)$$

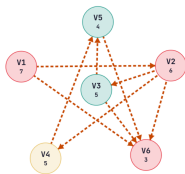
$$\forall v, e, f \in \delta^-(v), \quad (D5)$$

$$e \neq f, \quad (D5)$$

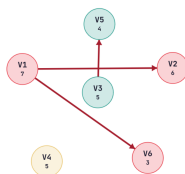
$$\forall e \in \vec{E}. \quad (D5)$$



Graph G



Complément orienté



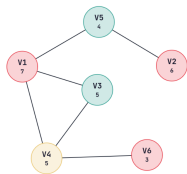
Étoiles orientées sélectionnées

Réparation par le modèle Dual

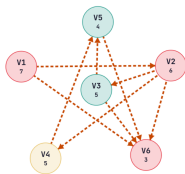
Modèle Dual

- chaque arête du complément est orientée du sommet lourd vers le sommet léger
- chaque arc reçoit le poids de sa cible.

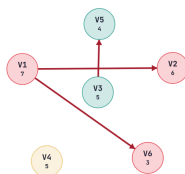
Maximiser la somme des poids des arcs sélectionnés.



Graph G



Complément orienté



Étoiles orientées sélectionnées

$$\max \sum_{e \in \vec{E}} \hat{w}_e x_e \quad (D1)$$

$$\text{s.c. } x_{vu} + x_{vw} \leq 1, \quad \begin{matrix} vu, vw \in \vec{E}, \\ uw, wu \notin \vec{E} \end{matrix} \quad (D2)$$

$$x_e + x_f \leq 1, \quad \begin{matrix} \forall v, e \in \delta^-(v), \\ f \in \delta^+(v) \end{matrix} \quad (D3)$$

$$x_e + x_f \leq 1, \quad \begin{matrix} \forall v, e, f \in \delta^-(v), \\ e \neq f \end{matrix} \quad (D4)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in \vec{E}. \quad (D5)$$

Réparation par le modèle Dual

Modèle Dual

- chaque arête du complément est orientée du sommet lourd vers le sommet léger
- chaque arc reçoit le poids de sa cible.

Maximiser la somme des poids
des arcs sélectionnés.

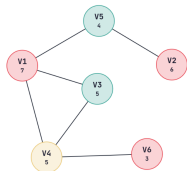
$$\max \sum_{e \in \vec{E}} \hat{w}_e x_e \quad (D1)$$

$$\text{s.c. } x_{vu} + x_{vw} \leq 1, \quad vu, vw \in \vec{E}, \quad (D2)$$

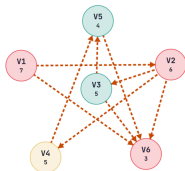
$$x_e + x_f \leq 1, \quad \forall v, e \in \delta^-(v), \quad f \in \delta^+(v), \quad (D3)$$

$$x_e + x_f \leq 1, \quad \forall v, e, f \in \delta^-(v), \quad e \neq f, \quad (D4)$$

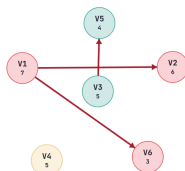
$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in \vec{E}. \quad (D5)$$



Graphes G



Complément orienté



Étoiles orientées sélectionnées

Réparation par le modèle Dual : adaptation à l'ALNS

Construction du graphe adapté

- chaque groupe conservé G_g est représenté par un nœud de poids

$$W_g = \max_{v \in G_g} w_v$$

- chaque sommet détruit u_i est représenté par un nœud de poids w_i
- deux types d'arêtes sont ajoutés :
 - entre un groupe conservé et un sommet détruit compatibles
 - entre deux sommets détruits compatibles.

Application du modèle Dual

Le modèle Dual est appliqué directement au graphe ainsi construit.

Maximiser la somme des poids des arcs sélectionnés.

Décoder, valider, puis intensifier

Décodage de la réparation

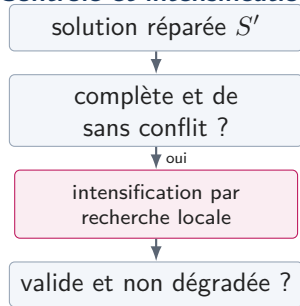
M2

- $x_{ig} = 1$: couleur du groupe G_g
- $y_{ii} = 1$: nouvelle couleur
- $y_{ih} = 1$: couleur créée par u_h

Dual

- étoile avec G_g : couleur conservée
- étoile dans U : nouvelle couleur
- sommet isolé : couleur singleton

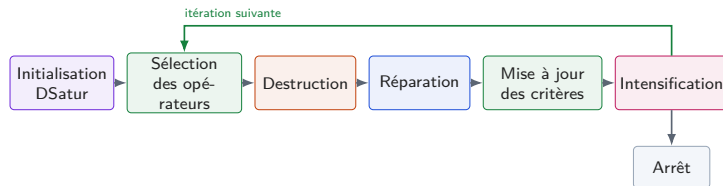
Contrôle et intensification



Sinon : restauration de la solution précédant la destruction.

Recherche locale : RedLS [Wang *et al.*, 2020]

Sélection adaptative des six couples



Un couple $o = (D, R) \in \mathcal{O}$

	Réparation	
Destruction	M2	Dual
D_{heavy}	o_1	o_2
D_{color}	o_3	o_4
D_{dense}	o_5	o_6

Récompense du couple sélectionné

$$\Delta_t = f(S_t) - f(S_{t+1})$$

$$\gamma_t = \Delta_t(1 + 0,01t)$$

$$\omega_{o_t} \leftarrow \omega_{o_t} + \gamma_t$$

Mise à jour uniquement si $\Delta_t > 0$.

Deux stratégies de sélection des couples

Roulette

$$\Pr_{\text{Roulette}}(o) = \frac{1 + \omega_o}{\sum_{o' \in \mathcal{O}} (1 + \omega_{o'})}$$

- sélection initiale uniforme
- couples récompensés favorisés
- probabilité toujours strictement positive
- exploration permanente

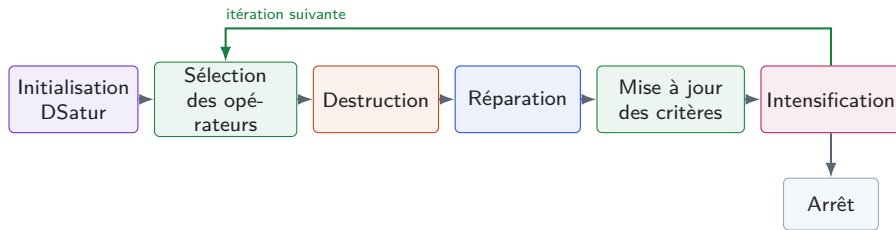
Deleter

$$\Pr_{\text{Deleter}}(o) = \frac{(1 + \omega_o)\lambda_o}{\sum_{o' \in \mathcal{O}} (1 + \omega_{o'})\lambda_{o'}}$$

- chance initiale $\lambda_o = 1$
- amélioration : $\lambda_o \leftarrow 1$
- échec : $\lambda_o \leftarrow 0,5\lambda_o$
- suppression sous $\lambda_{\min} = 0,05$.

Roulette : [Ropke and Pisinger, 2006]

Adapter la taille du sous-problème



Taux de destruction

$$d_0 = 0,20, \quad K_t = \lceil d_t |V| \rceil$$

$$d_{t+1} = \begin{cases} \max(0,05, d_t - 0,05), & \sigma_t \neq \text{OPTIMAL}, \\ \min(1, d_t + 0,05), & \sigma_t = \text{OPTIMAL}, \\ d_t, & r_t < 3 \text{ s}, \\ \text{sinon.} \end{cases}$$

Interprétation

- non optimal en 5 s : sous-problème réduit
- optimal en moins de 3 s : voisinage élargi
- optimal entre 3 et 5 s : taux inchangé

Analyse expérimentale

Deux protocoles expérimentaux complémentaires

Modèles exacts

188 instances

benchmark de l'état de l'art

une exécution
par modèle et par instance

Dual, Dual+B,
M2, M2+B, Joint

Méthodes approchées

55 instances difficiles

20 exécutions prévues
par méthode et par instance

ILSTS, RedLS, ALNS

C++17 / GCC 13.3.0 – Gurobi 13.0.0 – Grid'5000 – 3 600 s

+B : bornes de [Goudet *et al.*, 2023].

Résultats des méthodes exactes

Modèle	BKS atteints	Optimalités
Dual	139/188	133/188
Dual+B	139/188	133/188
M2	133/188	122/188
M2+B	144/188	136 /188
Joint	152 /188	135/188

BKS : meilleur score connu ;

+B : ajout des bornes.

M2+B

14 preuves d'optimalité
supplémentaires par rapport à M2.

Bornes avec Dual

Aucun BKS ni aucune preuve
d'optimalité supplémentaire.

Modèle Joint

Meilleure performance en nombre de
BKS atteints : **152 instances**.

Résultats des méthodes approchées

Méthode	BKS atteints	Meilleurs scores	Meilleures moyennes
ILSTS	24/55	35/55	38/55
RedLS	13/55	34/55	20/55
ALNS	16/55	16/55	7/55

ILSTS

Méthode globalement la plus performante sur les trois indicateurs.

RedLS

Atteint le moins de BKS, mais conserve des performances robustes et obtient un meilleur score sur 34 instances.

ALNS

Atteint 16 BKS, mais reste moins performante et moins stable, avec seulement 7 meilleures moyennes.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Contributions scientifiques

- conception et implémentation d'une **ALNS originale** pour le WVCP
- performances globalement inférieures aux méthodes de la littérature, mais **16 BKS atteints** sur un ensemble de 55 instances difficiles
- proposition du **modèle Joint en PLNE**, atteignant un BKS sur **152 des 188 instances**
- renforcement de M2 par des bornes, avec **14 preuves d'optimalité supplémentaires**

Apports du stage

- développement algorithmique en C++
- résolution par un solveur commercial
- déploiement et gestion des expériences sur un cluster

Perspectives

1. **Destruction guidée par apprentissage** : exploiter les analyses expérimentales de la littérature pour identifier les caractéristiques récurrentes des sommets impliqués dans les améliorations.
2. **Mise à jour incrémentale des données** : réutiliser la matrice B de l'itération précédente et ne mettre à jour que les éléments affectés par les changements de la solution.
3. **Réparation approchée alternative** : utiliser ponctuellement une méthode approchée à la place de Gurobi pour diversifier et accélérer la réparation.
4. **Intégration du modèle Joint** : ajouter Joint comme troisième opérateur de réparation afin d'élargir les choix disponibles pour l'ALNS.

Merci pour votre attention

Des questions ?

Habib Khteira

Université d'Angers – LORIA



Daniel Brélaz.

New methods to color the vertices of a graph.

Communications of the ACM, 22(4):251–256, 1979.



Denis Cornaz, Fabio Furini, and Enrico Malaguti.

Solving vertex coloring problems as maximum weight stable set problems.

Discrete Applied Mathematics, 217:151–162, 2017.



Fabio Furini and Enrico Malaguti.

Exact weighted vertex coloring via branch-and-price.

Discrete Optimization, 9(2):130–136, 2012.



Olivier Goudet, Cyril Grelier, and Jin-Kao Hao.

A deep learning guided memetic framework for graph coloring problems.

Knowledge-Based Systems, 258:109986, 2022.



Olivier Goudet, Cyril Grelier, and David Lesaint.

New bounds and constraint programming models for the weighted vertex coloring problem.

In *IJCAI*, pages 1927–1934, 2023.



Cyril Grelier, Olivier Goudet, and Jin-Kao Hao.

On monte carlo tree search for weighted vertex coloring.

In *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization (Part of EvoStar)*, pages 1–16. Springer, 2022.



Cyril Grelier, Olivier Goudet, and Jin-Kao Hao.

A memetic algorithm with adaptive operator selection for graph coloring.

In *European conference on evolutionary computation in combinatorial optimization (part of EvoStar)*, pages 65–80. Springer, 2024.



Cyril Grelier.

Métaheuristiques Guidées par l'Apprentissage pour la Coloration de Graphe.

Theses, Université d'Angers, December 2023.



Enrico Malaguti, Michele Monaci, and Paolo Toth.

Models and heuristic algorithms for a weighted vertex coloring problem.

Journal of Heuristics, 15(5):503–526, 2009.



Bruno Nogueira, Eduardo Tavares, and Paulo Maciel.

Iterated local search with tabu search for the weighted vertex coloring problem.

Computers & Operations Research, 125:105087, 2021.



Marcelo Prais and Celso C Ribeiro.

Reactive grasp: An application to a matrix decomposition problem in tdma traffic assignment.

INFORMS Journal on Computing, 12(3):164–176, 2000.



Celso Carneiro Ribeiro, Michel Minoux, and Manoel Camillo Penna.

An optimal column-generation-with-ranking algorithm for very large scale set partitioning problems in traffic assignment.

European Journal of Operational Research, 41(2):232–239, 1989.



Stefan Ropke and David Pisinger.

An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows.

Transportation Science, 40(4):455–472, 2006.



Wen Sun, Jin-Kao Hao, Xiangjing Lai, and Qinghua Wu.

Adaptive feasible and infeasible tabu search for weighted vertex coloring.

Information Sciences, 466:203–219, 2018.



Yiyuan Wang, Shaowei Cai, Shiwei Pan, Ximing Li, and Monghao Yin.

Reduction and local search for weighted graph coloring problem.

In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 34, pages 2433–2441, 2020.



D. J. A. Welsh and M. B. Powell.

An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems.

The Computer Journal, 10(1):85–86, 1967.